

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP
KHOA SƯ PHẠM TOÁN - TIN

BÀI TẬP
TOÁN CAO CẤP 2

ĐỒNG THÁP - 2013

MỤC LỤC

1	Giới hạn và đạo hàm của hàm một biến	4
1.1	Tập số thực và giới hạn dãy số	4
1.1.1	Tập số thực	4
1.1.2	Giới hạn dãy số	4
1.1.3	Bài tập	4
1.2	Giới hạn hàm số và hàm số liên tục	5
1.2.1	Giới hạn hàm số	5
1.2.2	Hàm số liên tục	5
1.2.3	Bài tập	5
1.3	Đạo hàm và vi phân	7
1.3.1	Đạo hàm	7
1.3.2	Vi phân	7
1.3.3	Bài tập	7
1.4	Áp dụng	8
1.4.1	Các định lí giá trị trung bình và khai triển Taylor	8
1.4.2	Một số bài toán thực tế	8
1.4.3	Bài tập	8
2	Nguyên hàm và tích phân xác định	11
2.1	Nguyên hàm	11
2.1.1	Khái niệm và tính chất	11
2.1.2	Phương pháp tính nguyên hàm	11
2.1.3	Bài tập	11
2.2	Tích phân xác định	12
2.2.1	Khái niệm và tính chất	12

2.2.2	Phương pháp tính tích phân xác định	12
2.2.3	Bài tập	12
2.3	Tích phân suy rộng	13
2.3.1	Khái niệm tích phân suy rộng	13
2.3.2	Dấu hiệu hội tụ	13
2.3.3	Bài tập	13
2.4	Áp dụng	14
2.4.1	Áp dụng trong hình học	14
2.4.2	Áp dụng trong kĩ thuật	14
2.4.3	Áp dụng trong kinh tế	14
2.4.4	Bài tập	14
3	Chuỗi và phương trình vi phân	16
3.1	Chuỗi	16
3.1.1	Khái niệm	16
3.1.2	Dấu hiệu hội tụ	16
3.1.3	Bài tập	16
3.2	Phương trình vi phân	17
3.2.1	Phương trình vi phân cấp 1	17
3.2.2	Phương trình vi phân cấp 2	17
3.2.3	Bài tập	17
3.3	Phương trình sai phân	18
3.3.1	Khái niệm cơ bản	18
3.3.2	Phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng	18
3.3.3	Bài tập	18
3.4	Áp dụng	19
3.4.1	Một số áp dụng trong khoa học tự nhiên	19
3.4.2	Một số áp dụng trong kinh tế	19
3.4.3	Bài tập	19
	Tài liệu tham khảo	21

CHƯƠNG 1

GIỚI HẠN VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM MỘT BIẾN

1.1 Tập số thực và giới hạn dãy số

1.1.1 Tập số thực

1.1.2 Giới hạn dãy số

1.1.3 Bài tập

Bài 1.1.1. Chứng minh các giới hạn sau bằng định nghĩa:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0.$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty.$

Bài 1.1.2. Xét sự hội tụ của các dãy số sau:

a) $x_n = \frac{2n+1}{n+1}.$

c) $x_n = 2^n.$

b) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

d) $x_n = \frac{2^n}{n!}.$

Bài 1.1.3. Tính các giới hạn dãy số sau.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - n^2 + 1}{1 - 3n + n^3}.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} - 2.5^n + 1}{2.5^n - 4.3^n}.$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 1}}{2n + 1}.$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{1 + 2n + n^3}.$$

Bài 1.1.4. Tính các giới hạn dãy số sau.

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n^2 - n + 1}).$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + a^2} - n).$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}).$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{1 - n^3}).$$

Bài 1.1.5. Tính các giới hạn dãy số sau.

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 - 2n^2}.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}.$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

1.2 Giới hạn hàm số và hàm số liên tục

1.2.1 Giới hạn hàm số

1.2.2 Hàm số liên tục

1.2.3 Bài tập

Bài 1.2.1. Chứng minh các giới hạn hàm số sau bằng định nghĩa.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = 2.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$$

Bài 1.2.2. Tính các giới hạn hàm số sau.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 1}{1 - 2x + x^3}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{1 + 2x}.$$

Bài 1.2.3. Tính các giới hạn hàm số sau.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + 3x + 1).$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x + 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{x}.$

Bài 1.2.4. Tính các giới hạn hàm số sau.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x).$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 2}{\sqrt{x} - 1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}.$

Bài 1.2.5. Tính các giới hạn hàm số sau.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right)^{3x^2 + 1}.$

Bài 1.2.6. Tính các giới hạn hàm số sau.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x + 1) - \ln(x^2 + 1)}{x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\tan^2 x}.$

Bài 1.2.7. Tính các giới hạn hàm số sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan x.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + 1}.$

Bài 1.2.8. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{x^3 + x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2(x-1)}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1. \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} & \text{nếu } x \geq 1 \\ 1-2x & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

Bài 1.2.9. Tìm a để hàm số sau liên tục

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{nếu } x \neq 2 \\ a+1 & \text{nếu } x = 2. \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+1) & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2ax+3 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-3}-1}{x^2-9} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 2a-1 & \text{nếu } x = 3. \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} e^x+1 & \text{nếu } x < 0 \\ x+a & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$$

Bài 1.2.10. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm

a) $x^2 - x = \cos x$.

b) $x^7 - 3x^5 + x + 2 = 0$.

1.3 Đạo hàm và vi phân

1.3.1 Đạo hàm

1.3.2 Vi phân

1.3.3 Bài tập

Bài 1.3.1. Tính đạo hàm các hàm số sau bằng định nghĩa

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ tại $x = -1$.

c) $f(x) = e^x$ tại $x = 1$.

b) $f(x) = \sin x$ tại $x = 0$.

d) $f(x) = \ln(2x+3)$ tại $x = -1$.

Bài 1.3.2. Tính vi phân các hàm số sau

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$.

b) $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$.

d) $f(x) = x \sin(\cos x)$.

Bài 1.3.3. Tính đạo hàm các hàm số sau

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } x < 1. \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = x|x|.$$

Bài 1.3.4. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

$$\text{a) } f(x) = e^{2x}.$$

$$\text{c) } f(x) = \sin x.$$

$$\text{b) } f(x) = \ln x.$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Bài 1.3.5. Xét tính khả vi của các hàm số sau

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0. \end{cases}$$

1.4 Áp dụng

1.4.1 Các định lý giá trị trung bình và khai triển Taylor

1.4.2 Một số bài toán thực tế

1.4.3 Bài tập

Bài 1.4.1. Kí hiệu $C(x)$ là tổng chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm.

- Hãy tìm tốc độ thay đổi của chi phí sản xuất trên mỗi đơn vị sản phẩm tại x đơn vị sản phẩm đã được sản xuất.
- Hãy ước lượng chi phí sản xuất sản phẩm thứ $x + 1$ theo tổng chi phí sản xuất x sản phẩm.

Bài 1.4.2. Biết rằng sức nặng W tính bằng pound của một người trung bình được cho bởi công thức

$$W = 5 \cdot 10^{-4} h^3, \quad 30 \leq h \leq 74.$$

Trong đó h là chiều cao của người đó và tính bằng inch. Hãy ước lượng sự thay đổi của W khi h tăng từ 40 lên 42.

Bài 1.4.3. Tính các giới hạn hàm số sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}. \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}. \end{array}$$

Bài 1.4.4. Chứng minh rằng

$$\begin{array}{l} \text{a) } |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}. \\ \text{b) } \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \text{ với mọi } x > 0. \\ \text{c) } e^x \geq 1+x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \\ \text{d) } x + \frac{x^3}{3} < \tan x \text{ với mọi } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{array}$$

Bài 1.4.5. Áp dụng vi phân tính gần đúng các giá trị sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{401}. & \text{c) } \ln(0,982). \\ \text{b) } \sqrt[3]{1,01^2}. & \text{d) } e^{0,02}. \end{array}$$

Bài 1.4.6. Khai triển Taylor của các hàm số sau tại lân cận của điểm x_0

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \sqrt{x} \text{ với } x_0 = 4. & \text{c) } f(x) = x^5 - 2x^4 + 8x - 2 \text{ tại } x = 1. \\ \text{b) } f(x) = xe^x \text{ với } x_0 = 1. & \text{d) } f(x) = \sin x \text{ tại } x = 0. \end{array}$$

Bài 1.4.7. a) Xấp xỉ hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ với một biểu thức chứa các lũy thừa bé hơn hoặc bằng 5 của $(x-1)$ và áp dụng tính gần đúng $\sqrt[3]{1,1}$.

b) Xấp xỉ hàm số $f(x) = \cos x$ với một đa thức bậc 6 của x và áp dụng tính gần đúng $\cos 1$.

Bài 1.4.8. Chi phí nhiên liệu cho hoạt động cho một đầu tàu hoả tỉ lệ với bình phương vận tốc và bằng 25000 đồng mỗi giờ đối với vận tốc 40km/h. Tổng các chi phí khác là 100.000 đồng mỗi giờ. Hãy xác định vận tốc để chi phí chung cho mỗi km là thấp nhất.

Bài 1.4.9. Một hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không nắp đáy, được thiết kế để có thể tích 216 m^3 với giá 5000 đồng mỗi m^2 đáy và 2500 đồng mỗi m^2 cho mỗi mặt bên. Xác định kích thước hình hộp để chi phí thấp nhất.

Bài 1.4.10. Số vé Q bán được của một hãng xe buýt liên hệ với giá vé P là $Q = 10000 - 125P$. Tìm mức giá P để doanh thu đạt tối đa.

CHƯƠNG 2

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 Nguyên hàm

2.1.1 Khái niệm và tính chất

2.1.2 Phương pháp tính nguyên hàm

2.1.3 Bài tập

Bài 2.1.1. Chứng minh rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

a) $F(x) = \frac{x + \ln |\sin x + \cos x|}{2}, f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$

b) $F(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$

Bài 2.1.2. Tính các tích phân bất định sau

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$ c) $\int x(1+2x)(1+x)^2 dx.$

b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$ d) $\int (\sin x + x\sqrt{x} + e^{-x}) dx.$

Bài 2.1.3. Tính các tích phân bất định sau

a) $\int x^5 \sqrt{x^3 + 1} dx.$ c) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$

b) $\int \frac{4x+1}{2x^2+x-3} dx.$ d) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+3 \tan x}}.$

Bài 2.1.4. Tính các tích phân bất định sau

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx.$

c) $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$

d) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$

Bài 2.1.5. Tính các tích phân bất định sau

a) $\int x \ln(2x + 1) dx.$

c) $\int x^2 e^x dx.$

b) $\int (2x - 1) \cos x dx.$

d) $\int e^x \sin x dx.$

2.2 Tích phân xác định

2.2.1 Khái niệm và tính chất

2.2.2 Phương pháp tính tích phân xác định

2.2.3 Bài tập

Bài 2.2.1. Tính các tích phân xác định sau

a) $\int_0^1 x^2(x + 1) dx.$

c) $\int_0^{\ln 2} (1 + e^{2x})e^{-x} dx.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x - x) dx.$

d) $\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x\right) dx.$

Bài 2.2.2. Tính các tích phân xác định sau

a) $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx.$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$

b) $\int_2^3 \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} dx.$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Bài 2.2.3. Tính các tích phân xác định sau

a) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+1}} dx.$

c) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$

b) $\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9-4x^2} dx.$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx.$

Bài 2.2.4. Tính các tích phân xác định sau

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx.$

c) $\int_1^e x \ln^2 x dx.$

b) $\int_0^1 x e^{2x} dx.$

d) $\int_1^e (2x+1) \ln x dx.$

Bài 2.2.5. Chứng minh rằng

a) $1 \leq \int_0^1 e^{\sin^2 x} dx \leq e.$

b) $\frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{10}.$

Bài 2.2.6. Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt.$

b) $f(x) = \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$

Bài 2.2.7. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx.$

c) $\int_0^2 f(x) dx$ với $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$

b) $\int_2^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx.$

d) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx.$

2.3 Tích phân suy rộng

2.3.1 Khái niệm tích phân suy rộng

2.3.2 Dấu hiệu hội tụ

2.3.3 Bài tập

Bài 2.3.1. Tính các tích phân suy rộng sau (nếu hội tụ)

a) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx.$

c) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx.$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$

Bài 2.3.2. Xét tính hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1 + x^2}{x^3} dx.$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx.$

b) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx.$

d) $\int_0^{+\infty} \cos x dx.$

Bài 2.3.3. Tính các tích phân suy rộng sau (nếu hội tụ)

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

c) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(4-x^2)^5}} dx.$

b) $\int_0^1 x \ln x dx.$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx.$

2.4 Áp dụng

2.4.1 Áp dụng trong hình học

2.4.2 Áp dụng trong kĩ thuật

2.4.3 Áp dụng trong kinh tế

2.4.4 Bài tập

Bài 2.4.1. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường sau

a) Đường cong $y = x^2$, đường thẳng $y = 4$ và đường thẳng $x = 0$ với $x \geq 0$.

b) Parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$.

c) Đồ thị hàm số $y = x^3$ và các đường thẳng $y = x$, $y = 2x$.

d) Đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a, b > 0$.

Bài 2.4.2. Tính thể tích các vật thể tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường sau khi quay quanh Ox và Oy

a) Đồ thị $y = 4 - x^2$ và đường thẳng $y = 0$.

b) Đường cong $xy = 4$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Bài 2.4.3. Hãy xác định công P do lực biến thiên $F(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$ khi dịch chuyển một chất điểm từ $x = 1$ đến $x = 8$.

Bài 2.4.4. Tìm chi phí $C(Q)$ biết hàm cận biên của chi phí là $MC = Q + 10$ và chi phí cố định $C_f = 1000$.

Bài 2.4.5. Tìm doanh thu $R(Q)$ biết hàm cận biên của doanh thu là $MR = 10Q$ và $Q \in [10, 1000]$.

CHƯƠNG 3

CHUỖI VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

3.1 Chuỗi

3.1.1 Khái niệm

3.1.2 Dấu hiệu hội tụ

3.1.3 Bài tập

Bài 3.1.1. Tính tổng (nếu có) của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Bài 3.1.2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos \pi n}{n^2}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

Bài 3.1.3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{3n^2+2}\right)^n$.

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{2^n}.$$

Bài 3.1.4. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}.$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n4^n}.$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} (x-1)^n.$$

d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}}.$$

Bài 3.1.5. Tính các tổng $S(x)$ sau

a)
$$S(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

b)
$$S(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

3.2 Phương trình vi phân

3.2.1 Phương trình vi phân cấp 1

3.2.2 Phương trình vi phân cấp 2

3.2.3 Bài tập

Bài 3.2.1. Chứng minh rằng

a) Hàm số $y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $xy' + y = y^2 \ln x.$

b) Hàm số $y = \sin x + 1$ là nghiệm riêng của phương trình $y' = \cos x$ với điều kiện đầu $y(0) = 1.$

c) Hàm số $y = e^x (a \cos 2x + b \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos x.$

Bài 3.2.2. Giải các phương trình vi phân sau

- a) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$. c) $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$.
 b) $xdx - y^2dy = 0$ với $y(0) = 3$. d) $xy' = x.e^{\frac{y}{x}} + y$ với $y(1) = 0$.

Bài 3.2.3. Giải các phương trình vi phân sau

- a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. c) $y' - 2xy = 3x^3y^2$.
 b) $y' + \frac{y}{x} = x$. d) $2xyy' - y^2 + 2x = 0$.

Bài 3.2.4. Giải các phương trình vi phân sau

- a) $y'' - 2y' + y = 0$ với $y(0) = 2, y'(0) = 1$.
 b) $y'' + 4y = 0$ với $y(0) = 0, y'(0) = 2$.
 c) $y'' + 3y' = 0$ với $y(0) = 0, y'(3) = 0$.
 d) $y'' + 3y' + 2y = 0$ với $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

Bài 3.2.5. Giải các phương trình vi phân sau

- a) $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$. c) $y'' + y = 4x \sin x$.
 b) $y'' - 5y' + 4y = xe^{2x}$. d) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

3.3 Phương trình sai phân

3.3.1 Khái niệm cơ bản

3.3.2 Phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng

3.3.3 Bài tập

Bài 3.3.1. Tìm sai phân cấp 1 của các hàm số sau

- a) $y_t = 3t^2$. b) $y_t = t(t - 1)$.

Bài 3.3.2. Giải các phương trình sai phân sau

a) $y_{t+1} - 2y_t = 0.$

c) $y_{t+1} - 3y_t = 0.$

b) $y_{t+1} + y_t = 0.$

d) $y_{t+1} + 4y_t = 0.$

Bài 3.3.3. Giải các phương trình sai phân sau

a) $y_{t+1} - 4y_t = 4$ với $y_0 = 2.$

c) $y_{t+1} - y_t = 3$ với $y_0 = 8.$

b) $2y_{t+1} = 6y_t - 3$ với $y_0 = 1.$

d) $y_{t+1} + y_t = 3$ với $y_0 = 4.$

Bài 3.3.4. Giải các phương trình sai phân sau

a) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0 .$

c) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 4y_t = 0.$

b) $2y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9 = 0.$

d) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0.$

Bài 3.3.5. Giải các phương trình sai phân sau

a) $y_{t+2} - 5y_t + 6y_t = 4^t.$

c) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t.$

b) $2y_{t+2} + 5y_{t+1} - 6y_t = 2^t.$

d) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 1.$

3.4 Áp dụng

3.4.1 Một số áp dụng trong khoa học tự nhiên

3.4.2 Một số áp dụng trong kinh tế

3.4.3 Bài tập

Bài 3.4.1. Một cộng đồng gồm 1000 cá thể được giả thiết là đồng nhất trong đó có 10 cá thể vừa trở về từ một cộng đồng khác mắc phải một loại dịch bệnh. Giả sử cộng đồng ban đầu không tiêm ngừa căn bệnh đó và tất cả các cá thể đều có thể mắc bệnh. Khảo sát thực nghiệm cho thấy dịch bệnh có khuynh hướng lây lan theo tốc độ bằng 0,5 lần tích số cá thể mắc bệnh và số cá thể không mắc bệnh. Hãy xác định số cá thể mắc bệnh $y(x)$ tại thời điểm $x = 10$.

Bài 3.4.2. Một chất thuốc được đưa vào máu với một tốc độ không đổi 0,5 ml/s và bị đào thải khỏi cơ thể ở một tốc độ bằng 0,2 lần nồng độ của nó trong máu tại cùng thời điểm.

- a) Hãy xác định nồng độ $x(t)$ của thuốc trong cơ thể tại thời điểm t .
- b) Tính nồng độ của chất thuốc trong máu tại thời điểm t biết $x(0) = 0$.

Bài 3.4.3. Giả sử 1 phân tử chất C được sinh ra khi kết hợp 1 phân tử chất A và 1 phân tử chất B và ngược lại. Nồng độ của A và B ban đầu lần lượt là 2 mol/cm^3 và 3 mol/cm^3 và nồng độ chất C tại thời điểm t là $x(t)$. Tốc độ biến thiên của nồng độ chất C bằng 0,5 lần tích nồng độ của chất A và chất B tại thời điểm t . Hãy xác định nồng độ chất C tại thời điểm t biết rằng tại thời điểm ban đầu nồng độ chất C bằng 0.

Bài 3.4.4. Biết rằng tốc độ tăng dân số của một địa phương bằng 2% số dân tại thời điểm đó và số dân tại thời điểm ban đầu là 100,000 người. Hãy xác định số dân của địa phương đó tại thời điểm t .

Bài 3.4.5. Giả sử lượng cung Q_s và lượng cầu Q_d của một loại hàng hoá tại thời kì t được cho bởi phương trình

$$Q_d(t) = 3 - p(t), \quad Q_s(t) = -2 + 4p(t).$$

Biết rằng lượng điều chỉnh giá từ thời kì này sang thời kì khác bằng 0,1 lần quỹ dự trữ theo chiều ngược lại. Hãy xác định $p(t)$ biết giá tại thời kì ban đầu là $p(0) = 10$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đặng Thế Cấp (chủ biên), *Giải tích toán học*, Nhà xuất bản giáo dục, 2007.
- [2] Lê Sĩ Đồng (chủ biên), *Toán cao cấp phần giải tích*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.
- [3] Trần Phước Đường (chủ biên), *Bài giảng môn học vi tích phân B*, Trường Đại học Cần Thơ, Tài liệu lưu hành nội bộ, 2002.
- [4] Đinh Thế Lục, Phạm Huy Điển và Tạ Duy Phương, *Giải tích toán học hàm số một biến*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội, 2005.
- [5] Nguyễn Đình Phư và Nguyễn Văn Nguyên, *Toán cao cấp*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia, 2009.
- [6] Lê Đình Thuý, *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, Nhà xuất bản Đại học Kinh tế quốc dân.
- [7] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), *Toán học cao cấp*, Tập 2-3, Phép tính giải tích một biến số, Nhà xuất bản giáo dục, 2005.
- [8] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), *Bài tập Toán học cao cấp*, Tập 2-3, Phép tính giải tích một biến số, Nhà xuất bản giáo dục, 2005.